View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号_______密级 ______

学　　号：200223033　　　　　　　　UDC________________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

# 违约风险建模的数学理论及其应用

# Mathematical Theories and Applications of Default Risk Modeling

宋　丽　平

指导教师姓名：　李 时 银 副教授

专　业　名　称：　概率论与数理统计

论文提交日期：　2 0 0 5　年　4　月

论文答辩日期：　2 0 0 5　年　　月

学位授予日期：　2 0 0 5　年　　月

答辩委员会主席：_________

评　　阅　　人：_________

**2005** 年 **4** 月

厦门大学博硕士论文摘要库

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学博硕士论文摘要库

# 摘 要

本文的主要目的就是介绍违约风险建模的数学理论基础，并进一步研究违约风险模型的推广及其在脆弱期权定价上的应用.

虽然大量的论文利用随机时间研究违约风险（如文[15] [16] [17] [18]），但是大多未讨论其理论基础，因而先讨论其理论背景就显得很有必要.

脆弱期权即是带有对手违约风险的期权，它具有双重风险：市场风险和违约风险.对违约风险进行建模主要有两种方法，最早的是公司价值模型（firm value model）：当企业价值低于其债务总额时违约发生；这些年来蓬勃兴起的是强度模型(intensity model):用一个外生的随机过程(一般为 Poisson 过程）来描述违约过程，其中 Poisson 过程的强度$\lambda$即为违约强度，$\lambda$可以是常数[7]、时间的函数[8][9]或随机变量[10].

强度模型假定违约强度与标的资产价格、企业价值不相关，但在现实经济社会中，违约强度（即单位时间内违约发生的概率）$\lambda$与它们有紧密的联系.同时违约强度$\lambda$在实际当中不太可能是确定性的,也不会任意变动,而是会围绕其均值上下波动,即$\lambda$会遵循均值回复过程.

因而本文对目前带有违约风险的 Black－Scholes 期权定价模型[15]进行研究和推广：用强度遵从均值回复过程的重随机的 Poisson 过程来描述违约过程并且采用公司价值模型的补偿率；在假定违约强度过程与标的资产价格、企业价值的扩散过程两两相关的情形下，采用等价鞅测度变换方法和建模的数学理论推导出脆弱欧式看涨期权的价格公式.

**关键词**：违约风险；建模理论；脆弱期权

厦门大学博硕士论文摘要库

# Abstract

The aim of this paper is to provide a relatively concise – but still self-contained – overview of mathematical notions and results which underin the valuation of defaultable claims. Further more, the extension of the default risk models and its application in the vulnerable options are also discussed in the paper.

Default risk modeling by a random time was extensively studied in numerous recent papers（such as [15] [16] [17] [18]）. However, it seems that most of these papers lack a sound theoretical background. So it is necessary to give a theoretical study for the modeling of default risk.

Vulnerable options, also called options with counterparty default risk, have double risks. One is market risk, the other is default risk due to the changes in credit quality of the counterparty firm. Default risk modeling approaches usually fall into two categories. The earliest approach is firm value model, which supposes that the firm defaults if its value is not sufficient to pay off the due debt; Most recently is intensity model, which uses an exterior process(usually a Poisson process) to describe the process of default. The intensity $\lambda$ of Poisson process is called default intensity and $\lambda$ can be a constant [7], a function of time [8][9] or a stochastic variable [10].

Intensity model assumes that default intensity is independent of the underlying asset price and the value of counterparty firm. In the economy society, however, default intensity $\lambda$, which is the probability of default in one unit time, is closely related with them. And $\lambda$ can't be determined or an arbitrary variable. In fact, default intensity $\lambda$ may fluctuate with its mean value, that is, $\lambda$ is a mean-reverting process.

This paper studies and generalizes the models of pricing vulnerable Black-Scholes options [15] under assumptions which are appropriate in many business situations. We describe the process of default by a doubly stochastic Poisson process, and assume that the intensity process $\lambda$ of Poisson process follows a mean-reverting process. At the same time, we use the recovery of firm value model and suppose that default intensity process $\lambda$ correlates mutually with the diffuse processes of the underling asset price and the value of the counterparty firm. By applying equivalent martingale measure transformation within the framework of our model, a closed form analytic solution for the vulnerable European call options is given.



**Keywords**: default risk; theories of modeling; vulnerable options


厦门大学博硕士论文摘要库

# 目 录



厦门大学博硕士论文摘要库

# Contents



厦门大学博硕士论文摘要库

# 第一章　引 言

## 第一节　衍生产品合约与违约风险

目前，衍生产品市场已经成为全球金融、投资领域内最为活跃的一部分. 衍生产品市场在近些年来迅速发展，并在风险管理、价格发现和降低交易成本等方面起到重要的作用.

衍生产品合约（derivative contract），是一种价值依赖于其他更基本的标的变量（underling variables）的合约，这些标的变量可以是可交易证券的价格，某公司的股票价格，市场上的股票指数，某商品的价格等等. 衍生产品合约主要的形式有远期合约（forward contract）、期货合约（futures contract）和期权合约（option contract）.

远期合约是一种特别简单的衍生产品合约，它是一个在将来确定的时间按预先确定的价格购买或出售某项资产的协议，一般是金融机构或金融机构和它们的客户之间所签署的协议，不在规范的交易所内进行交易，交易双方无需成本就可以处于合约的多头方（long position）或合约的空头方（short position）.期货合约是两个对手之间签订的在将来某确定的时间按预先约定的价格购买或出售某项资产的协议，它与远期合约不同的是，期货合约通常在规范的交易所内进行，要交保证金，可以在到期日之前通过反向的交易平仓.

期权合约是衍生产品合约最主要的形式，它分为看涨期权（call option）和看跌期权（put option)，期权的承买方（holder）称为期权的多头方(long position)，期权的承卖方(writer)称为期权的空头方(short position). 期权多头方有权利（但无责任和义务）在期权合约的有效期内选择是否执行期权，期权空头方有责任（不是权利）执行期权.期权可分



厦门大学博硕士论文摘要库

为美式期权（American option）和欧式期权（European option）. 美式期权多头方可以选择在期权合约的到期日之前任何时刻执行期权，而欧式期权多头方只能在期权合约的到期日选择执行期权. 看涨期权的到期收益为 $X_T = \max\left(S_T - K, 0\right)$，看跌期权的到期收益为 $X_T = \max\left(K - S_T, 0\right)$，这里的 $S_T$ 表示 T 时标的资产的价格，K 是期权的执行价格（strike price）.

衍生产品合约的交易者大致可分为套期保值者、投机者和套利者. 套期保值者面临着与某项资产的价格相关的风险，他们应用衍生产品合约来减少或消除这种风险；投机者则对某项资产的未来价格变动下了赌注，他们应用衍生产品市场获得额外的杠杆效应；套利者利用两个不同市场的价格差异，在两个不同市场上持有不同的头寸，来锁定盈利.

衍生产品合约的定价方法有两种，一种是构造出一个可交易资产的自融资组合进行复制衍生产品合约的到期支付，若衍生产品合约的价格是时间和标的资产价格的充分光滑的函数，通过对标的资产的价格进行建模，利用 Ito 引理得到一个偏微分方程，结合该方程满足的初始条件和边界值条件，通过解微分方程得出衍生产品合约的价格公式，这种方法称为微分方程定价方法.另一种称为等价鞅测度或风险中性定价方法.当或有权益的到期支付可以被一组可交易资产的投资组合进行复制，则称该或有权益市场是完全的.Harrison 和 Pliska（1981）及 Delbean 和 Schwchmermager（1994）证明，在完全市场环境下有唯一的鞅测度存在，市场不存在套利机会.通过选择一个合适的与主观概率测度等价的鞅测度（称为风险中性测度）和一个作为计价标准的资产，衍生产品合约所依赖的标的资产的价格过程用该资产折现后在风险中性测度下是一个鞅，从而衍生产品合约的现时价格可解释为到期支付函数经计价标准资产折现后在风险中性测度下的条件期望值.

违约风险又称为信用风险，是指合约另一方未履行合约订立的义务而导致债权人发生经济损失的可能性.市场参与者长期以来就知道信用风险

厦门大学博硕士论文摘要库

对债券价格存在影响，但是直到近些年来才发展出量化这一影响的分析模型.Black 和 Scholes（1973）在他们关于期权定价的开创性论文中朝信用风险模型迈出了关键的第一步.Merton（1974）进一步发展了 Black 和 Scholes 的直觉，并将其融入分析的框架.之后人们追随 Black、Scholes 和 Merton 对信用风险进行了大量的研究.

信用风险在大多数金融交易中都是一个重要的考虑因素.与对待其他任何风险一样，风险承担者对其所承担的信用风险（无法通过分散化来消除）要求获得补偿.如在债券市场中，为了吸引投资者，发行风险较高的债券必须承诺更高的收益.但是收益应高多少呢？信用风险建模就是试图应用从风险权益分析而来的理论，为信用风险定价的.

信用风险模型已经融入到那些含有信用风险的衍生产品合约的定价中，因为信用风险能以多种不同方式影响衍生产品合约的定价.首先，衍生产品合约可能含有交易对手的违约风险.第二，衍生产品合约可能是以诸如公司债券这类易遭受信用风险的证券为标的发行的.第三，信用风险本身可能就是衍生产品合约的标的变量.第四，衍生产品合约自身可能遭受交易对手风险.

最初为风险债券或类似金融工具的定价建立的模型之一是 Merton（1974）[2]创立发展的.而基于 Merton（1974）的模型，第一个探讨含有交易对手违约风险的定价模型是 Johnson 和 Stulz（1987）[3].他们的研究是 Merton（1974）公司债券模型的一个扩展.设 $X_T$ 是对手方公司在 T 时刻的承诺支付，我们总假定权益是欧式的，即在到期日 T 之前不能执行.如果公司在权益的有效期内可以支付其债务，则在到期日 T 该权益可以得到 $X_T$ 的收益.如果在权益的有效期内公司破产了，权益持有者就不能得到 $X_T$ 的收益，而只是 $X_T$ 的一部分，一般地是 $X_T\dfrac{V_T}{D_T}$.这样带有违约风险的权益的到期收益可以表为

$$X_T^d = X_T I_{\{V_T \ge D_T\}} + \delta_T X_T I_{\{V_T < D_T\}} \tag{1.1.1}$$

这里的 $I_{\{\bullet\}}$ 是集合示性函数，$V_T$ 是交易对手方公司的资产价值，$S_T$ 是标的资产的价值， $\delta_T = \frac{V_T}{D_T}$ 是回收率（又称补偿率）.

如果违约时间为 $\tau$，则 $\tau \ge T$ 表示对手方公司在到期日前不发生违约或破产，而 $t < \tau < T$ 表示公司会违约或破产，从而在到期日 T 时该风险权益的价值也可以表为

$$X_T^d = X_T I_{\{\tau \ge T\}} + \delta_T X_T I_{\{t<\tau<T\}} \tag{1.1.2}$$

在市场存在鞅测度 $Q$ 的情况下,可得到该风险权益在 t 时刻的价格为

$$X_t^d = B_t E_Q\left[ B_T^{-1} X_T (I_{\{V_T \ge D_T\}} + \delta_T X_T I_{\{V_T < D_T\}}) | / F_t \right] \tag{1.1.3}$$

或

$$X_t^d = B_t E_Q\left[ B_T^{-1} X_T (I_{\{\tau \ge T\}} + \delta_T X_T I_{\{t<\tau<T\}}) | / F_t \right] \tag{1.1.4}$$

这里的 Q 表示鞅测度，$/ F_t$ 是直到 t 时的所有信息集（即 $\sigma -$ 代数），$B_t$ 用来对资产进行贴现，可理解为无违约货币市场帐户的价值，满足微分方程 $dB_t = r_t B_t dt$， $r_t$ 是无风险利率.

计算 $X_t^d$ 需要对相应的变量 $X_t$、$V_t$、$D_t$ 进行建模，当 $X_t$ 是确定的，$r_t$ 和 $D_t$ 是常数，$V_t$ 遵循几何布朗运动时，由上式得出的 $X_t^d$ 就是 Merton（1974）对零息票的风险债券进行定价的公式[2]. 但是衍生证券具有随机的结算金额 $X_T$，例如看涨期权的结算额是 $X_T = \max\left(S_T - K, 0\right)$，这里的 $S_T$ 表示 T 时标的资产的价格，K 是期权的执行价格.



厦门大学博硕士论文摘要库

## 第二节　违约风险建模方法

近些年来，人们开发了大量研究方法为带有违约风险的债券定价：传统方法（traditional approach）、公司价值模型（firm value model）、首越边界时间模型（first passage model）与强度模型（intensity model）.传统方法收集历史违约数据，并从这些数据中推得信用利差，关注的是违约风险评估这一概念，该探讨方法通常都不以模型为基础；公司价值模型运用 Merton（1974）发展的探讨方法[2]；首越边界时间模型也是运用公司价值这个概念，但公司价值被用来确定违约的时间，清偿率通常不是以公司价值为基础来确定的；强度模型运用跳跃过程的强度函数，而跳跃导致发生违约，人们对强度函数加以校正，使之符合市场数据.

其中公司价值模型和首越边界时间模型又统称为结构方法(structural approach)，因为它们通过给相对于其负债的公司资产价值建立模型来推得违约风险价格，即建立了公司资本结构模型.结构方法是由 Merton(1974)[2]开创，经 Black，Cox(1976)[4]，Longstaff 和 Schwartz (1995)[5]等修正发展起来的.

公司价值模型限定，当合约空头方的资产总值低于其债务总额时空头方才会违约.合约未到期之前，公司不被清算，因而公司破产或重组不会发生，合约空头方不违约.合约到期时，若发生违约，债权方（合约多头方）所获得的补偿率（recovery rate）是违约方公司的资产与债务之比（assets to liabilities）的函数.Merton（1974）给出了零息票公司债券的风险模型[2]，其有多种扩展方式.基于公司价值模型，在 Black－Scholes 环境中，由带有违约风险的标准期权的结算额可以推导出分析性的价格，其确切公式最先出现在 Klein（1996）[6].

首越边界时间模型假设，如果公司价值超过了某个通常与时间有关的

厦门大学博硕士论文摘要库

特定界限，那就发生破产.纯粹的Merton模型在债券到期日前不发生破产 ，与此不同，首越边界时间模型中的破产可以在到期日前出现.这种允许提前违约的结构模型是公司价值模型的丰富和发展，在一定程度上阻止了债权方进一步遭受更大的损失.

最近几年蓬勃兴起的是强度模型，该模型不考虑违约风险是否受合约空头方公司的资产－债务结构的影响，而是用一个外生的违约随机过程，譬如Poisson过程、Levy过程或Cox过程来描述违约事件的发生.其中违约过程的强度$\lambda$即为违约强度，它表示单位时间内违约发生的概率.$\lambda$可以是常数[7]、时间的函数[8][9]或随机变量[10].违约发生的时间为$\tau$，$\tau$可以是某一随机过程$\left\{\xi_t\right\}_{t\geq 0}$发生第一次跳跃的时间，即$\tau=\inf\left\{t \mid \xi_t=1, 0\leq \mathrm{t}\leq T\right\}$.

强度模型采用了与公司价值模型完全不同的探讨方法.违约或破产通过破产函数来表示，破产函数通常被定义为一个跳跃函数，即可以从无违约跳到违约.既定时间段中发生跳跃的概率取决于违约强度，通常用$\lambda$表示.由于违约函数模型中只包含违约时间，而没有包含发生违约时造成的损失的严重程度，因此经常假定清偿率是外部给定的.强度模型也称为简化形式方法（reduced form approach）.

Jarrow和Turnbull（1995）[7]提出了违约期限结构模型对应的离散时间和连续时间的强度模型，他们假设违约或破产时间$\tau$是以$\lambda$为参数的指数分布，$\lambda$是外生常数，且假定清偿率也是外生常数；Jarrow、Lando和Turnbull（1997）[9]提出了将违约概率与信用级别联系起来的模型，运用转移概率矩阵来描述信用等级及其转变情况，它取消了违约强度在不同时间中是一个常数的假设；Madan和Unal（1998）[10]提出了一个具有随机强度的强度模型，假设违约或破产时间$\tau$服从参数为随机强度$\lambda(\mathrm{t})=\dfrac{\mathrm{c}}{\ln^2\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}}}$的Beta分布，这里c是常数，d是公司的确定性债务，s是调整后的公司价值.



厦门大学博硕士论文摘要库

## 第三节　期权定价的Black－Scholes模型

目前，世界上用得最广泛的期权定价模型有两种，这两种模型都是针对欧式期权的.不同定价模型之间的区别主要是因为对标的资产价格随时间发生变化的假设不同，第一个模型假定标的资产价格的变化满足二项式分布，因而该模型被称为二项式期权定价公式；第二个模型假定标的资产价格变化满足对数正态分布，即Black－Scholes模型.

Black－Scholes假设：

1. 标的资产价格遵循几何布朗运动；
2. 允许卖空标的资产；
3. 没有交易费用和税收，所有资产都是完全可分的；
4. 在期权有效期内资产没有红利支付；
5. 不存在无风险套利机会；
6. 交易可连续进行；
7. 在期权有效期内，无风险利率r是常数.

在上述假定下，采用等价鞅测度变换方法，可得到欧式期权的价格公式.

由假设标的资产$S_t$遵循几何布朗运动：

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right)$$

其中常数$\mu,\sigma$分别为瞬时漂移率和瞬时波动率，$W_t$为带自然$\sigma-$代数流的概率空间$\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T},\mathrm{P}\right)$上的标准的布朗运动(也称Winner过程)，$\mathcal{F}_t=\sigma(W_s,0\le s\le t)$.

假定市场上的无风险利率r为常数，用$B_t$表示市场资金帐户，即$B_t$满足



厦门大学博硕士论文摘要库

$$dB_t = rB_t dt, (0 \le t \le T), B_T = B_t e^{r(T-t)}, B_0 = 1$$

定义一个与$P$等价的鞅测度$Q$，满足

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left[\gamma W_T - \frac{1}{2}|\gamma|^2 T\right] = \xi_T$$

其中$\gamma$称为资产风险的市场价格，$\gamma = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$，$|\gamma|$表示$\gamma$的模，$E_{\mathrm{P}}\left[\xi_T\right] = 1$，$E_{\mathrm{P}}\left[\xi_T | /F_t\right] = \xi_t, 0 \le t \le T$，$E_{\mathrm{P}}\left[\bullet\right]$和$E_{\mathrm{P}}\left[\bullet | /F_t\right]$分别为P－测度下的期望和条件期望运算符.

由Girsanov′s 定理[11]得到鞅测度下的$S_t$，它满足

$$dS_t = S_t\left(\mathrm{r}dt + \sigma d\tilde{W}_t\right)$$

或等价地有

$$S_T = S_t \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma\left(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t\right)\right\}$$

其中$\tilde{W}_t = W_t - \gamma t$是某概率空间$\left(\Omega, /F, Q\right)$上的标准的布朗运动，

$\left(\Omega, /F, \left(/\tilde{F}_t\right)_{0 \le t \le T}, Q\right)$是相应的带自然$\sigma-$代数流的概率空间，

$/\tilde{F}_t = \sigma(\tilde{W}_s, 0 \le s \le t) = /F_t$.

对于欧式看涨期权，其在到期日 T 时的收益为$\max\left(S_T - X, 0\right)$，根据风险中性定价原理[12]，在 Black－Scholes 环境下，欧式看涨期权在 t 时的价格$c_t$等于将期权到期收益的期望值按无风险利率进行贴现后的现值，即

$$c_t = B_t E_Q\left[B_T^{-1} \max\left(S_T - X, 0\right) | /F_t\right] = e^{-r(T-t)} E_Q\left[\max\left(S_T - X, 0\right) | /F_t\right]$$

对上式右边求值是一种积分过程，结果为

$$c_t = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r(T-t)} N\left(d_2\right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(x)$为标准正态分布的累积分布函数

这就是著名的Black－Scholes（1973）期权定价公式，它是对标的资产不支付红利的欧式看涨期权进行定价的公式，更为详细的内容见文[13].

厦门大学博硕士论文摘要库

# 第二章　建模理论

虽然大量的论文利用随机时间研究违约风险，例如文[15][16][17][18]，但是大多未讨论其理论基础，因而先讨论其理论背景就显得很有必要.

本章将从事金融交易的公司或企业的违约行为与违约概率作严谨的数学描述，进而给出金融衍生证券的定价理论. 这部分内容的研究是比较困难的，国内尚无人涉及. 本章将当今权威学者的最新研究成果融会贯通，并整理成一套理论，为后面的衍生证券定价打下了理论基础.

下面所说的滤子即$\sigma-$代数流.

## 第一节　随机时间的风险过程

令$\tau$是定义在概率空间$(\Omega,G,\mathrm{P})$上，取值为$R_+\cup\{\infty\}$的随机变量，下面称之为随机时间. 为方便起见，假定$\forall t>0$，有$\mathrm{P}(\tau=0)=0$，$\mathrm{P}(\tau>t)>0$. 引进过程$D_t=I_{\{\tau\le t\}}$和$\tilde{D}_t=I_{\{\tau<t\}}$（t>0）. 显然，$D_t$和$\tilde{D}_t$分别是右连续和左连续的过程. 令$\mathcal{D}_t=\sigma(D_u:u\le t)$和$\tilde{\mathcal{D}}_t=\sigma(\tilde{D}_u:u\le t)$, 这里的$\sigma(\bullet)$表示由随机变量$\bullet$所生成的$\sigma$－域. $\sigma$－域$\mathcal{D}_t$是由对$[0,t]$内的随机时间$\tau$的观察所生成的信息集，而$\sigma$－域$\tilde{\mathcal{D}}_t$是由对$[0,t)$内的随机时间$\tau$的观察所生成的信息集. 令$\mathcal{D}_\infty=\sigma(D_u:u>0)$和$\tilde{\mathcal{D}}_\infty=\sigma(\tilde{D}_u:u>0)$. 最后引进滤子$\mathbb{D}=(\mathcal{D}_t)_{t\ge0}$和$\tilde{\mathbb{D}}=(\tilde{\mathcal{D}}_t)_{t\ge0}$，假定这两个滤子在概率空间$(\Omega,G,\mathrm{P})$下都是完备的.

可以证明$\sigma$－域$\mathcal{D}_t$和$\tilde{\mathcal{D}}_t$有如下的基本性质[19]：

厦门大学博硕士论文摘要库

Degree papers are in the "Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database". Full texts are available in the following ways:
1. If your library is a CALIS member libraries, please log on http://etd.calis.edu.cn/ and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库